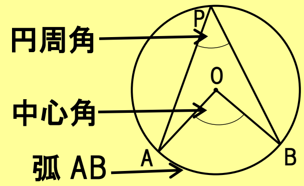
51　円周角の定理(1)

章	制限時間	合格点	
6	30 分	80 点	点

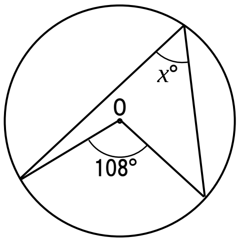
∠APB を $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角(えんしゅうかく)といいます。
1 つの弧に対する円周角は等しいです。
∠AOB を $\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角(ちゅうしんかく)といいます。
中心角は円周角の 2 倍です。



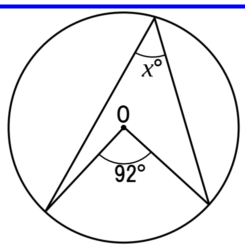
次の(　　　)にあてはまる言葉や記号を書きましょう。(5 点×5 問＝25 点)

①	円周上の A から B を(弧 AB)といいます。
②	弧 AB は、記号で($\overset{\frown}{AB}$)と表します。
③	弧 AB と円周上の点 P からなる∠APB を、弧 AB に対する(円周角)といいます。
④	弧 AB と中心の点 O からなる∠AOB を、弧 AB に対する(中心角)といいます。
⑤	中心角は円周角の(2 倍)の大きさです。

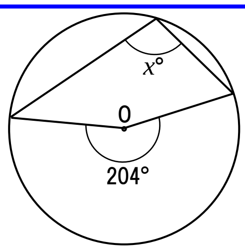
∠x の大きさを求めましょう。(5 点×15 問＝75 点)

例


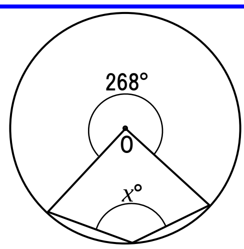
54°

①


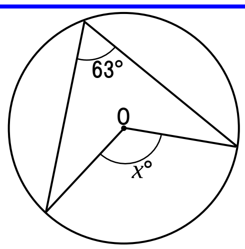
46°

②


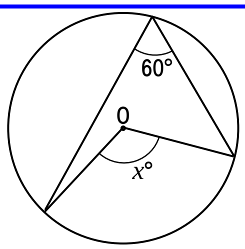
102°

③


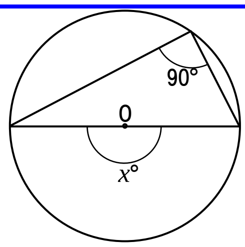
134°

例


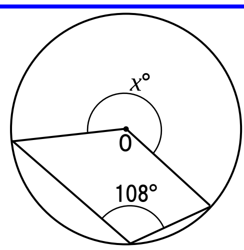
126°

④


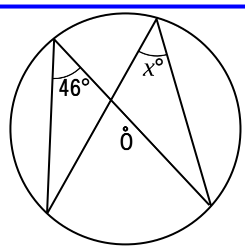
120°

⑤


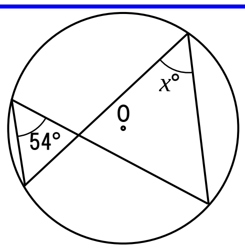
180°

⑥


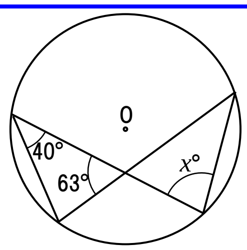
216°

例


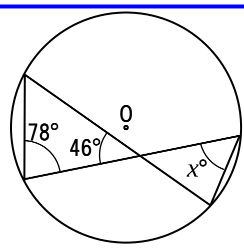
46°

⑦


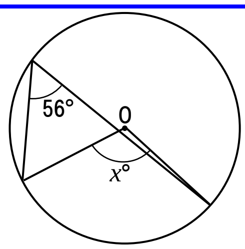
54°

⑧


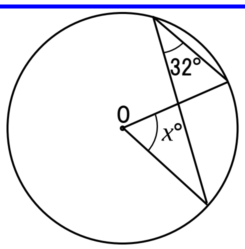
77°

⑨


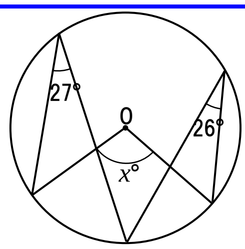
56°

例


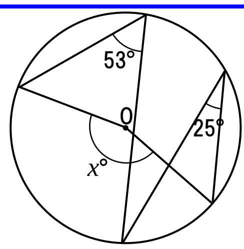
112°

⑩


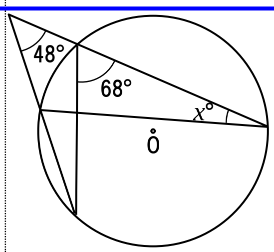
64°

⑪


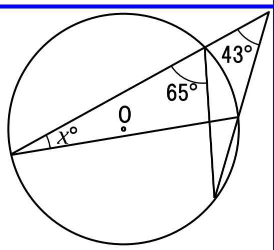
106°

⑫


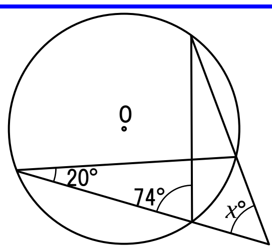
156°

例


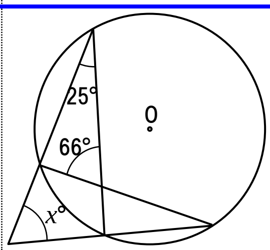
20°

⑬


22°

⑭


54°

⑮


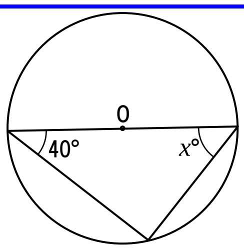
64°

52　円周角の定理(2)

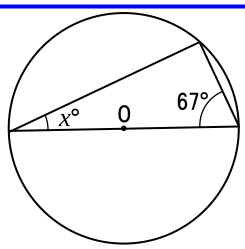
章	制限時間	合格点	
6	30 分	80 点	点

直径の中心角は 180°で、円周角は 90°になります。

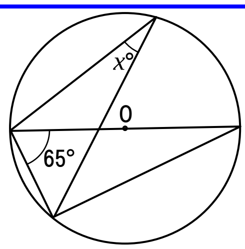
∠x の大きさを求めましょう。(5 点×6 問＝30 点)

例


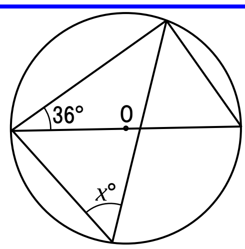
50°

①


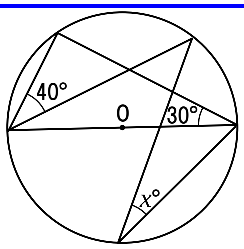
23°

②


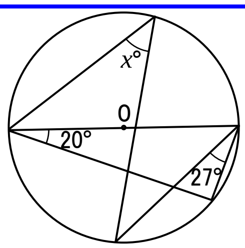
25°

③


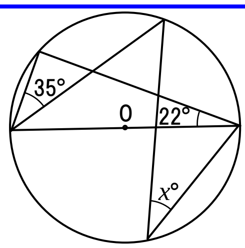
54°

例


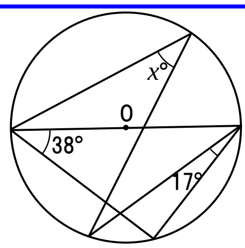
20°

④


43°

⑤


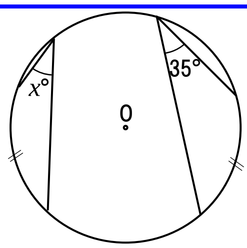
33°

⑥


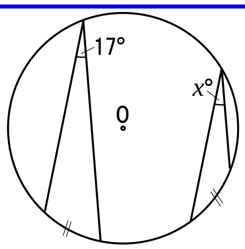
35°

1 つの円で、弧の長さが等しければ、円周角は等しいです。
円周を n 等分したとき、中心角 1 つの大きさは 360°÷n、円周角 1 つの大きさは 180°÷n で求めます。

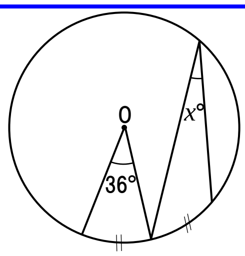
∠x の大きさを求めましょう。(5 点×4 問＝20 点)

①


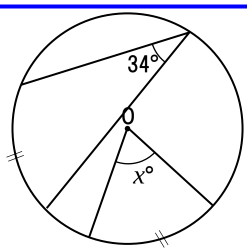
35°

②


17°

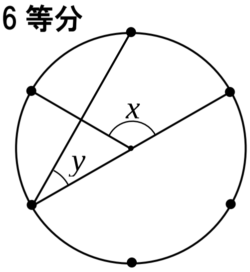
③


18°

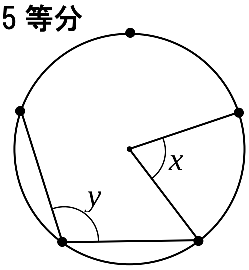
④


68°

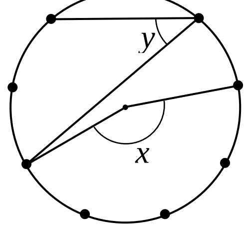
点が円を等分しているとき、∠x と∠y の大きさを求めましょう。(10 点×5 問＝50 点)

例　円の 6 等分


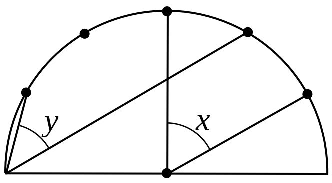
∠x＝360°÷6×2＝120°
∠y＝180°÷6×1＝30°

①　円の 5 等分


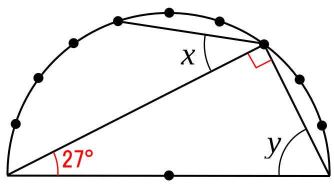
∠x＝360°÷5×1＝72°
∠y＝180°÷5×3＝108°

②　円の 9 等分


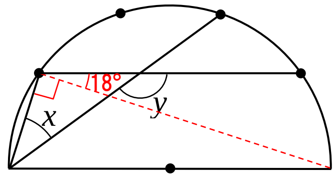
∠x＝360°÷9×4＝160°
∠y＝180°÷9×2＝40°

③　半円の 6 等分（円の 12 等分）


∠x＝360°÷12×2＝60°
∠y＝180°÷12×3＝45°

④　半円の 10 等分（円の 20 等分）


∠x＝180°÷20×4＝36°
∠y＝180°－90°－27°＝63°

⑤　半円の 5 等分（円の 10 等分）


∠x＝180°÷10×2＝36°
∠y＝∠x＋90°＋18°＝144°

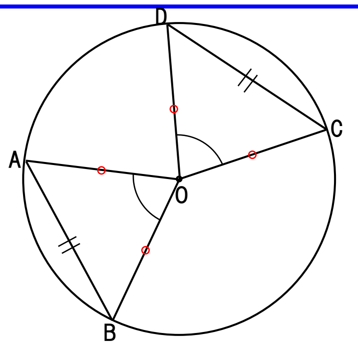
53　円周角の定理の証明(1)	章 6	制限時間 30 分	合格点 80 点	点

1 つの円の半径は等しいので、2 つの半径を含む三角形は二等辺三角形になります。
三角形の合同を利用すると、円周角の性質を証明することが出来ます。
三角形の合同条件 … ① 3 辺が等しい。 ② 2 辺とその間の角が等しい。 ③ 1 辺とその両端の角が等しい。
直角三角形の合同条件 … ① 斜辺と 1 つの鋭角が等しい。 ② 斜辺と他の 1 辺が等しい。

次のことを証明するのに、(　　)に合う言葉や記号を書きましょう。(20 点×5 問＝100 点)

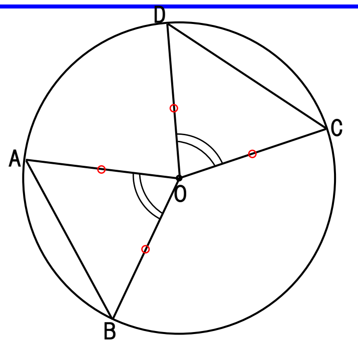
① 弦の長さが等しければ、中心角は等しい。

△OAB と△OCD において、
(半径)の長さは等しいので、OA＝OC、OB＝OD…①
仮定より、(弦の長さ)が等しいので、AB＝(CD)…②
①②より、(3 辺)がそれぞれ等しいので、△OAB≡△OCD
合同な三角形の対応する角は等しいので、∠AOB＝∠(COD)
したがって、弦の長さが等しければ、中心角は等しい。



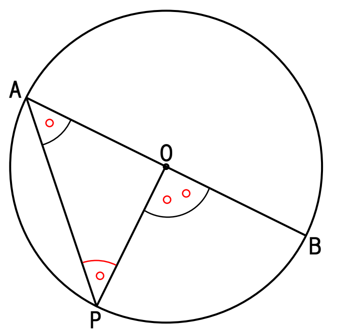
② 中心角が等しければ、弦の長さは等しい。

△OAB と△OCD において、
(半径)の長さは等しいので、OA＝OC、OB＝OD…①
仮定より、(中心角)が等しいので、∠AOB＝∠COD…②
①②より、(2 辺とその間の角)がそれぞれ等しいので、△OAB≡△OCD
合同な三角形の対応する辺は等しいので、AB＝(CD)
したがって、中心角が等しければ、(弦の長さ)は等しい。



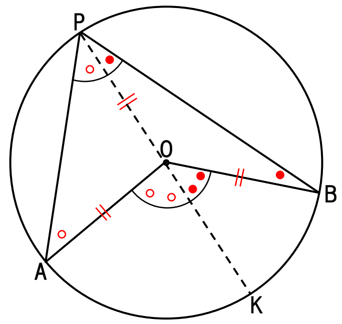
③ 円周角は中心角の半分である。

半径の長さは等しいので、△OAP は(二等辺)三角形である。
よって、∠OAP＝∠(OPA)…①
内角と外角の性質より、∠POB＝∠OAP＋∠(OPA)…②
①②より、∠OAP＝1/2∠(POB)
したがって、円周角は(中心角)の半分である。



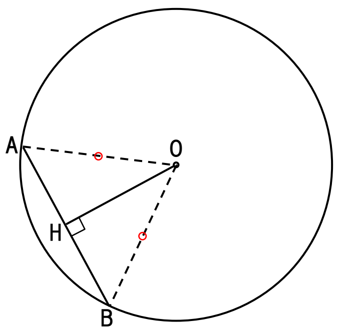
④ 中心角は円周角の 2 倍である。

半径の長さは等しいので、△OPA と△OPB は(二等辺)三角形である。
よって、∠OPA＝∠(OAP)…①、∠OPB＝∠(OBP)…②
内角と外角の性質と①より、∠AOK＝∠OPA＋∠(OAP)…③
内角と外角の性質と②より、∠BOK＝∠OPB＋∠(OBP)…④
③④より、∠AOB＝∠OPA＋∠OAP＋∠OPB＋∠OBP＝2∠(APB)
したがって、中心角は円周角の 2 倍である。



⑤ 円の中心から弦に引いた垂線は、その弦を 2 等分する。

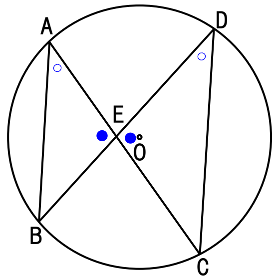
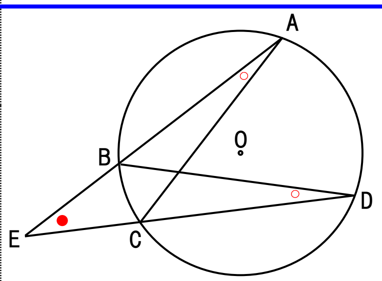
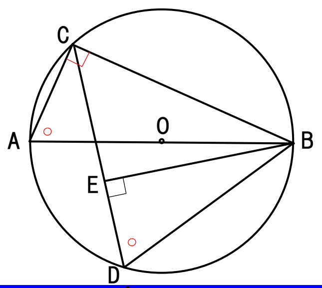
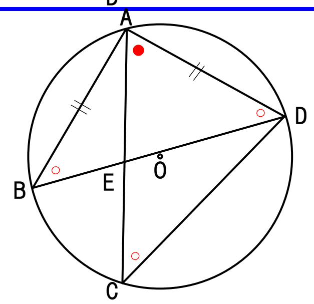
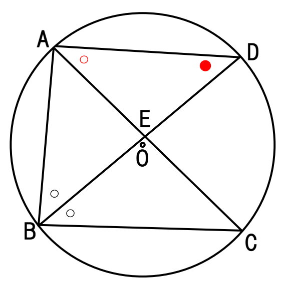
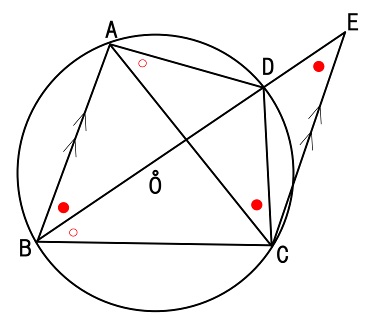
2 つの直角三角形△OAH と△OBH において、
半径は等しいので、OA＝(OB)…①
(共通)な辺なので、OH＝OH…②
①②より、(斜辺と他の 1 辺)がそれぞれ等しいので、△OAH≡△OBH
合同な三角形の対応する辺は等しいので、AH＝(BH)
したがって、円の中心から弦に引いた垂線は、その弦を(2 等分)する。



54　円周角の定理の証明(2)	章 6	制限時間 30 分	合格点 80 点	点

円周角の定理を利用して、三角形の相似を証明することが出来ます。
等しい角を 2 組見つけ、「2 組の角がそれぞれ等しい」という相似条件で証明します。

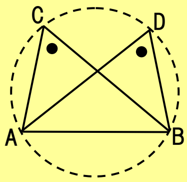
次のことを証明しましょう。(20 点×5 問＝100 点)

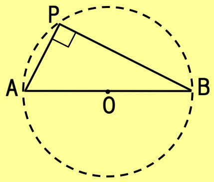
例		円 O 上に A、B、C、D があり、線分 AC と線分 BD の交点を E とする。 このとき、△ABE∽△DCE となる。 △ABE と△DCE で、 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角なので、∠BAE＝∠CDE …① 対頂角なので、∠AEB＝∠DEC …② ①②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、△ABE∽△DCE
①		円 O 上に A、B、C、D があり、線分 AB の延長と線分 DC の延長の交点を E とすると、△AEC∽△DEB となる。 △AEC と△DEB で、 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角なので、∠EAC＝∠EDB …① 共通な角なので、∠AEC＝∠DEB …② ①②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、△AEC∽△DEB
②		AB を直径とする円 O 上に C、D があり、点 B からひいた垂線と線分 CD の交点を E とすると、△ABC∽△DBE となる。 △ABC と△DBE で、 ∠ACB は直径に対する円周角で 90°なので、∠ACB＝∠DEB …① $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角なので、∠BAC＝∠BDE …② ①②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、△ABC∽△DBE
③		円 O 上に A、B、C、D があり、線分 AC と線分 BD の交点を E とする。 AB＝AD のとき、△ACD∽△ADE となる。 △ACD と△ADE で、$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角なので、∠ABD＝∠ACD …① △ABD は AB＝AD の二等辺三角形なので、∠ABD＝∠ADE …② ①②から、∠ACD＝∠ADE …③　共通な角なので、∠DAC＝∠EAD …④ ③④より、2 組の角がそれぞれ等しいので、△ACD∽△ADE
④		∠ABC の二等分線と円 O の円周との交点を D､辺 AC との交点を E とする。 このとき、△ABD∽△EAD となる。 △ABD と△EAD で、仮定より、∠ABD＝∠CBD …① $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角なので、∠EAD＝∠CBD …② ①②から、∠ABD＝∠EAD …③　共通な角なので、∠ADB＝∠EDA …④ ③④より、2 組の角がそれぞれ等しいので、△ABD∽△EAD
⑤		円 O 上に A、B、C、D があり、点 C を通り辺 AB に平行な直線と線分 BD の延長の交点を E とすると、△ACD∽△BEC となる。 △ACD と△BEC で、　$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角なので、∠DAC＝∠CBE …① $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角なので、∠ACD＝∠DBA …② AB//EC で錯角は等しいので、∠BEC＝∠DBA …③ ②③から、∠ACD＝∠BEC …④ ①④より、2 組の角がそれぞれ等しいので、△ACD∽△BEC

55　円の性質(1)

章	制限時間	合格点	
6	30 分	80 点	点

円周角の定理について、逆もいえます。
2 点 C、D が直線 AB について同じ側にあるとき、
∠C＝∠D ならば、A、B、C、D は同じ円周上にあります。
∠P＝90°のとき、点 P は AB を直径とする円周上にあります。

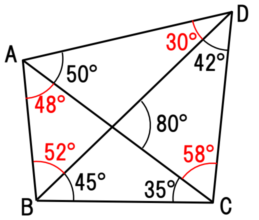




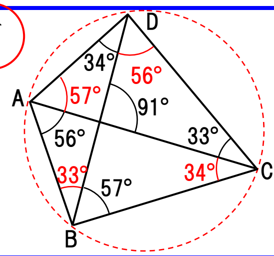
4 点 A、B、C、D が同じ円周上にあるものを 1 つずつ選び、記号に○をしましょう。(20 点×2 問＝40 点)

①

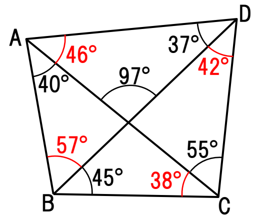
ア



イ

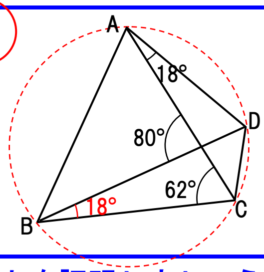


ウ

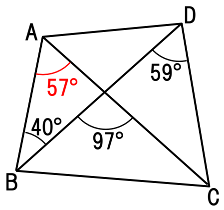


②

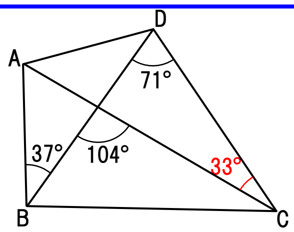
ア



イ

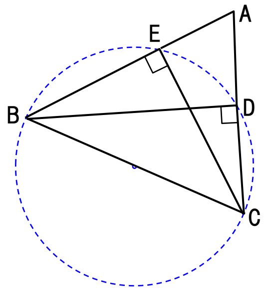


ウ



次のことを証明しましょう。(20 点×3 問＝60 点)

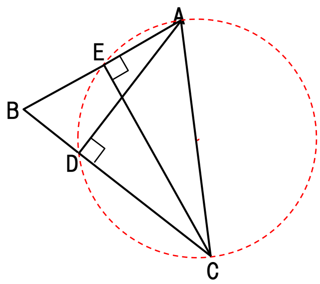
例



△ABC の頂点 B、C から垂線 BD、CE をひくとき、
4 点 B、C、D、E は同じ円周上にある。

BD、CE は垂線だから、∠BDC＝∠CEB＝90°
また、2 点 D、E は線分 BC について同じ側にある。
したがって、4 点 B、C、D、E は同じ円周上にある。

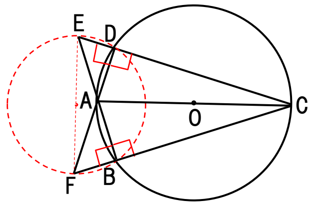
①



△ABC の頂点 A、C から垂線 AD、CE をひくとき、
4 点 A、C、D、E は同じ円周上にある。

AD、CE は垂線だから、∠ADC＝∠CEA＝90°
また、2 点 D、E は線分 AC について同じ側にある。
したがって、4 点 A、C、D、E は同じ円周上にある。

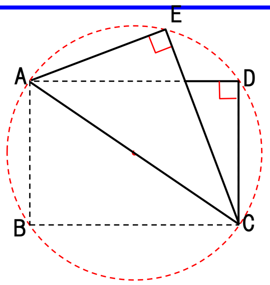
②



円 O は AC を直径とし、BA の延長と CD の延長の交点を E、DA の延長と CB の延長の交点を F とするとき、4 点 B、D、E、F は同じ円周上にある。

直径 AC に対する円周角なので、∠ADC＝∠ABC＝90°
よって、∠ADE＝∠ABF＝180°−90°＝90°
また、2 点 B、D は線分 EF について同じ側にある。
したがって、4 点 B、D、E、F は同じ円周上にある。

③



長方形 ABCD を AC で折り、点 B が移った点を E とする。
このとき 4 点 A、C、D、E は同じ円周上にある。

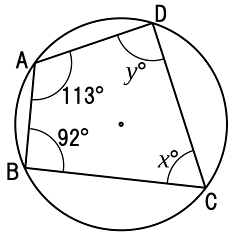
四角形 ABCD は長方形なので、∠ADC＝∠AEC＝90°
また、2 点 D、E は線分 AC について同じ側にある。
したがって、4 点 A、C、D、E は同じ円周上にある。

56　円の性質(2)

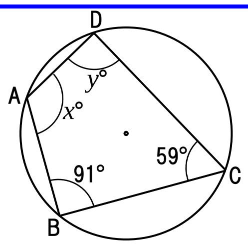
章	制限時間	合格点	
6	30 分	80 点	点

円に内接する四角形の向かい合う内角の和は 180°になります。
円に内接する四角形の 1 つの内角は、向かい合う内角のとなりの外角と等しいです。
弦と接線のつくる角は、その弧に対する円周角と等しいです。

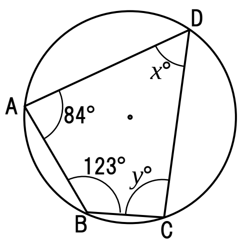
$\angle x$ と $\angle y$ の大きさを求めましょう。(5 点×12 問＝60 点)

①


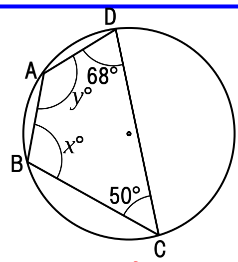
$\angle x=67^\circ$　$\angle y=88^\circ$

②


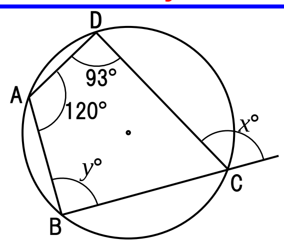
$\angle x=121^\circ$　$\angle y=89^\circ$

③


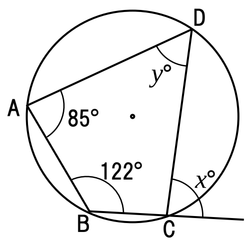
$\angle x=57^\circ$　$\angle y=96^\circ$

④


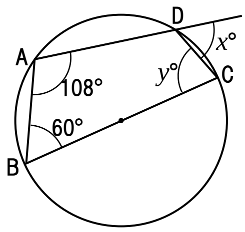
$\angle x=112^\circ$ $\angle y=130^\circ$

⑤


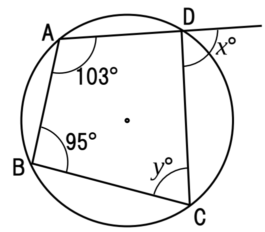
$\angle x=120^\circ$　$\angle y=87^\circ$

⑥


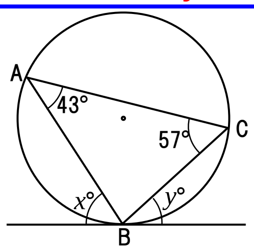
$\angle x=85^\circ$　$\angle y=58^\circ$

⑦


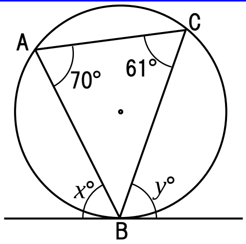
$\angle x=60^\circ$　$\angle y=72^\circ$

⑧


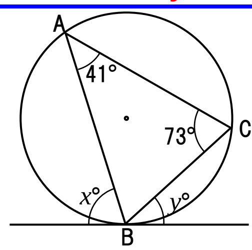
$\angle x=95^\circ$　$\angle y=77^\circ$

⑨


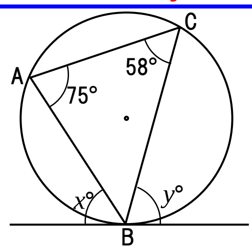
$\angle x=57^\circ$　$\angle y=43^\circ$

⑩


$\angle x=61^\circ$　$\angle y=70^\circ$

⑪


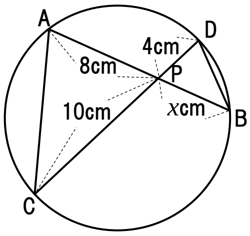
$\angle x=73^\circ$　$\angle y=41^\circ$

⑫


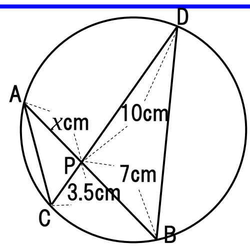
$\angle x=58^\circ$　$\angle y=75^\circ$

円周上の 4 点 A、B、C、D において、AB と CD の交点を P とすると、PA×PB＝PC×PD になります。

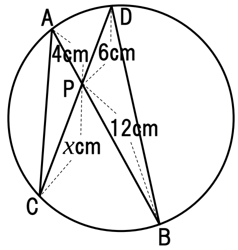
x の値を求めましょう。(5 点×8 問＝40 点)

①


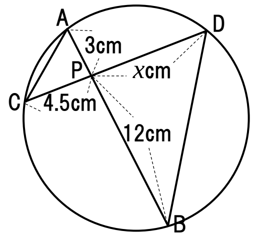
$8\times x=10\times 4$
$8x=40$
$x=5$(cm)

②


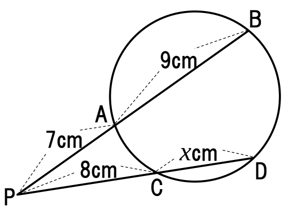
$x\times 7=10\times 3.5$
$7x=35$
$x=5$(cm)

③


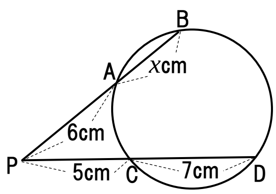
$6\times x=4\times 12$
$6x=48$
$x=8$(cm)

④


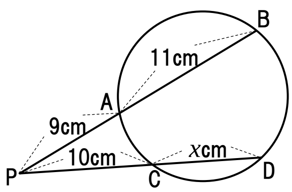
$4.5\times x=3\times 12$
$4.5x=36$
$x=8$(cm)

⑤


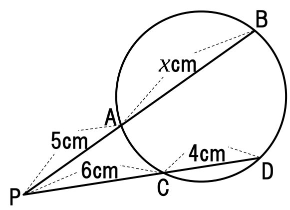
$8\times(8+x)=7\times 16$
$64+8x=112$
$8x=48$　$x=6$(cm)

⑥


$6\times(6+x)=5\times 12$
$36+6x=60$
$6x=24$　$x=4$(cm)

⑦


$10\times(10+x)=9\times 20$
$100+10x=180$
$10x=80$　$x=8$(cm)

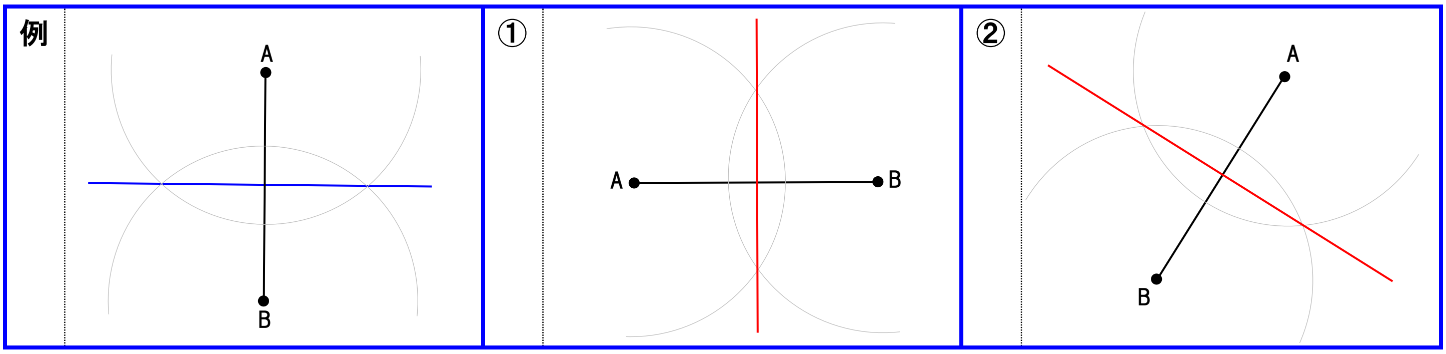
⑧


$5\times(5+x)=6\times 10$
$25+5x=60$
$5x=35$　$x=7$(cm)

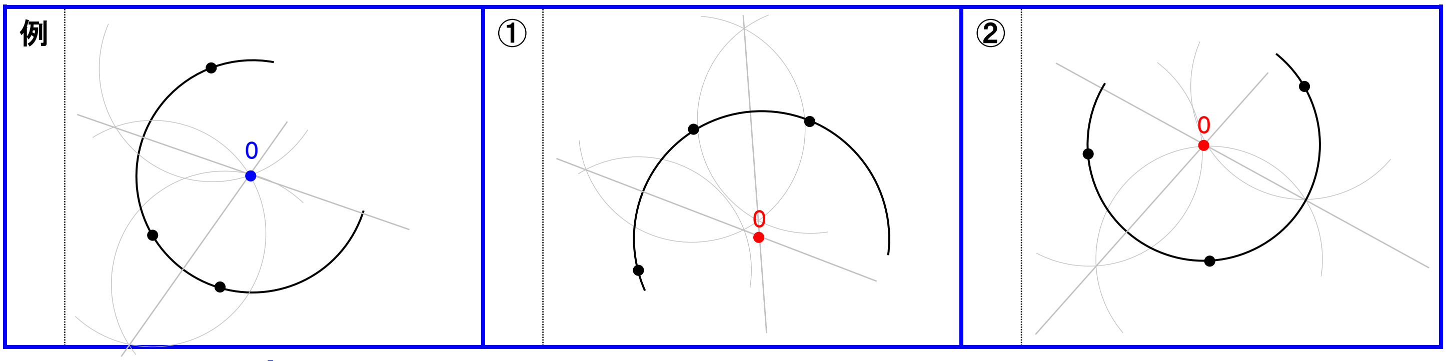
57　円を利用した作図(1)	章 6	制限時間 30 分	合格点 80 点	点

コンパスと定規があれば、垂直二等分線、垂線、角の二等分線などの基本的な作図が出来ます。

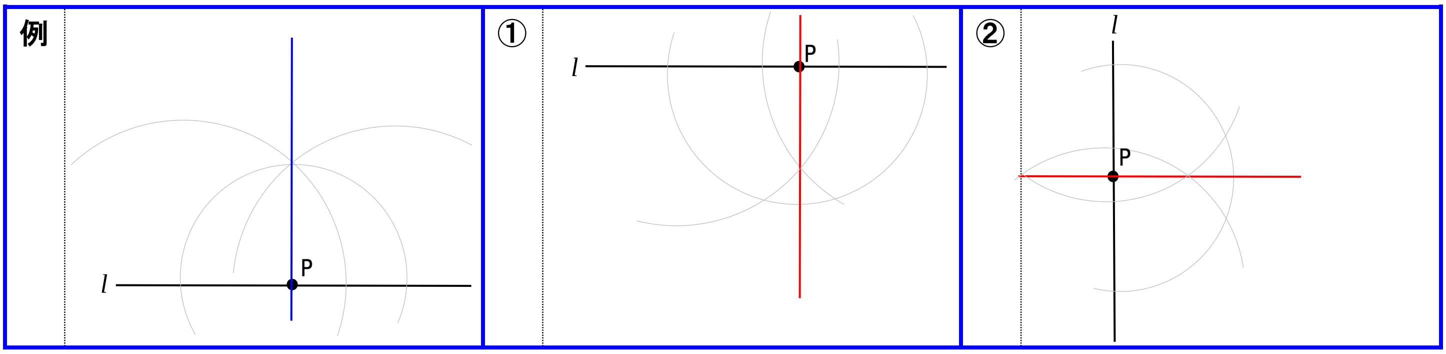
線分 AB の垂直二等分線を作図しましょう。(10 点×2 問＝20 点)



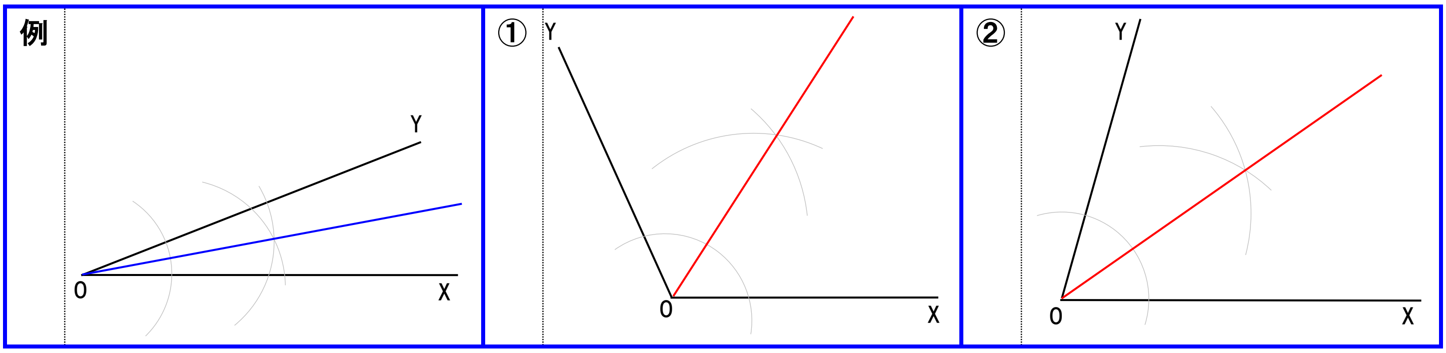
円上の 3 つの点から円の中心 O を求めましょう。(10 点×2 問＝20 点)



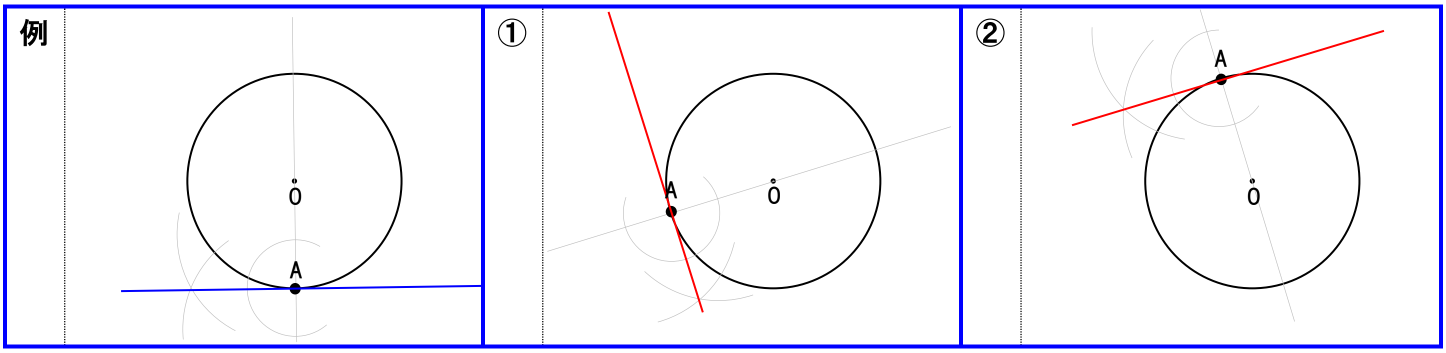
点 P を通り、直線 l の垂線になる直線を作図しましょう。(10 点×2 問＝20 点)



角 XOY の二等分線を作図しましょう。(10 点×2 問＝20 点)



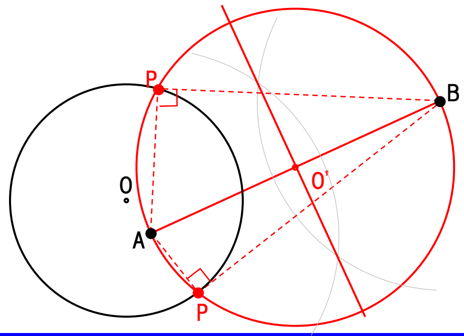
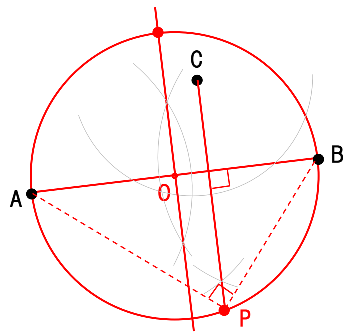
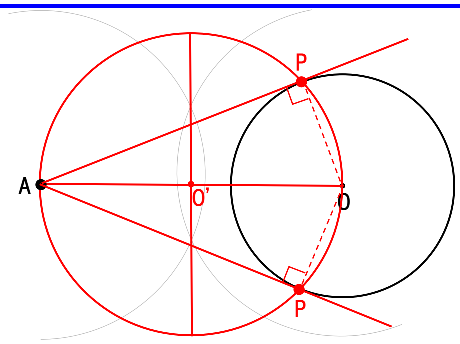
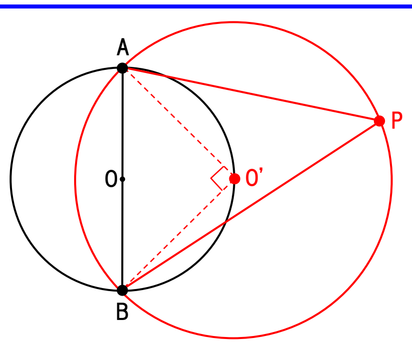
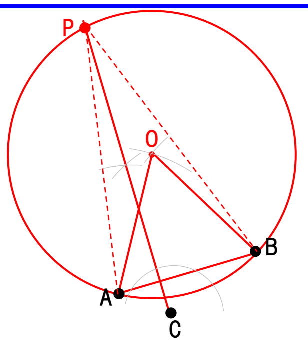
点 A が接点となる接線を作図しましょう。(10 点×2 問＝20 点)



58　円を利用した作図(2)	章 6	制限時間 30 分	合格点 80 点	点

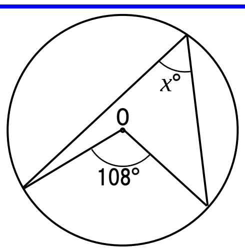
基本的な作図と円周角の定理を組み合わせると、いろいろな作図が出来ます。
90°の作図 … 直径の円周角が 90°になることを利用
60°の作図 … 正三角形の 1 つの内角が 60°になることを利用
45°の作図 … 直径の円周角が 90°なので、その半分が 45°になることを利用
30°の作図 … 正三角形の 1 つの内角が 60°なので、その半分が 30°になることを利用

手順に従って作図しましょう。(20 点×5 問＝100 点)

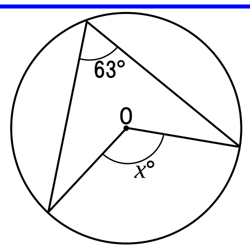
①		∠APB＝90°となる円 O 上の点 P (AB を直径とする円を作図) 【作図の手順】 ① 線分 AB の垂直二等分線をひき、AB との交点を O'とする。 ② 点 O'を中心とする半径 O'A の円をかく。 ③ 円 O と円 O'の交点を P とする。
②		AB⊥CP、∠APB＝90°となる点 P (AB を直径とする円を作図) 【作図の手順】 ① 線分 AB の垂直二等分線をひき、AB との交点を O とする。 ② 点 O を中心とする半径 OA の円をかく。 ③ 点 C を通る線分 AB の垂線をひく。 ④ 円 O と③の直線の交点を P とする。
③		点 A を通る円 O の接線 AP (AO を直径とする円を作図) 【作図の手順】 ① 線分 AO の垂直二等分線をひき、AO との交点を O'とする。 ② 点 O'を中心とする半径 O'A の円をかく。 ③ 円 O と円 O'の交点を P とし、直線 AP をひく。
④		∠APB＝45°となる点 P ($\overset{\frown}{AB}$に対する中心角が 90°になる円 O'を作図) 【作図の手順】 ① 円 O 上に点 O'をとる。 ② 点 O'を中心とする半径 O'A の円をかく。 ③ 円 O'上に点 P をとる。
⑤		AB⊥CP、∠APB＝30°となる点 P ($\overset{\frown}{AB}$に対する中心角が 60°になる円 O を作図) 【作図の手順】 ① AB を 1 辺とする正三角形 OAB をつくる。 ② 点 O を中心とする半径 OA の円をかく。 ③ 点 C を通る線分 AB の垂線をひく。 ④ 円 O と③の直線の交点を P とする。

59　6章の確認テスト(1)	章 6	制限時間 30分	合格点 80点	点

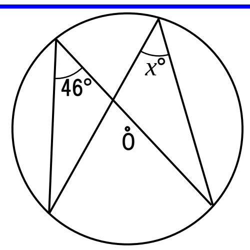
∠x の大きさを求めましょう。(5点×12問＝60点)

①


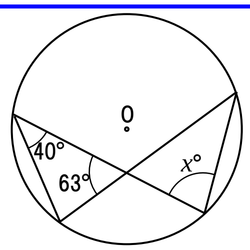
54°

②


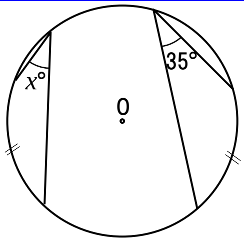
126°

③


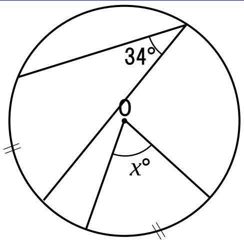
46°

④


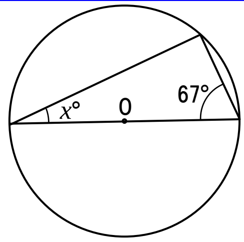
77°

⑤


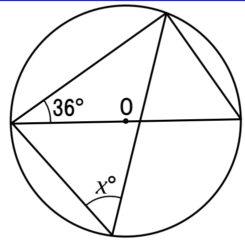
35°

⑥


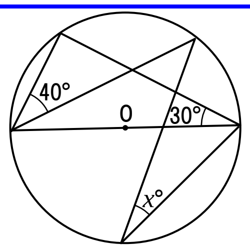
68°

⑦


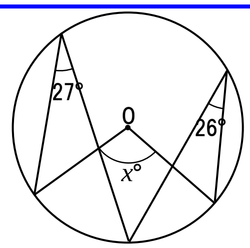
23°

⑧


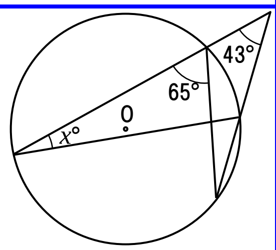
54°

⑨


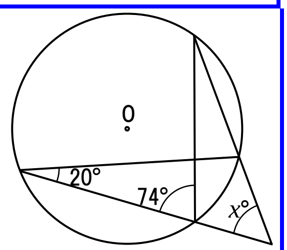
20°

⑩


106°

⑪


22°

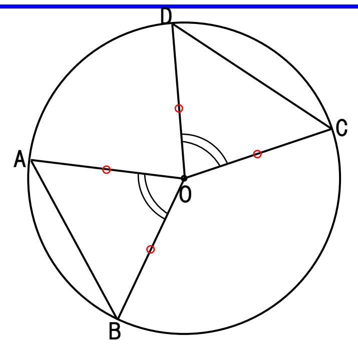
⑫


54°

次のことを証明するのに、(　　)に合う言葉や記号を書きましょう。(13点×2問＝26点)

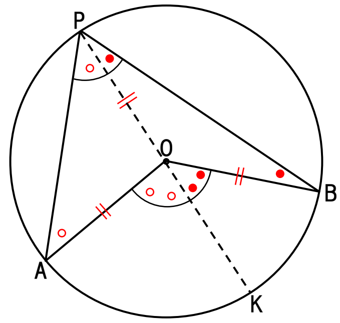
① 中心角が等しければ、弦の長さは等しい。

△OABと△OCDにおいて、
(半径)の長さは等しいので、OA＝OC、OB＝OD…①
仮定より、(中心角)が等しいので、∠AOB＝∠COD…②
①②より、(2辺とその間の角)がそれぞれ等しいので、△OAB≡△OCD
合同な三角形の対応する辺は等しいので、AB＝(CD)
したがって、中心角が等しければ、(弦の長さ)は等しい。

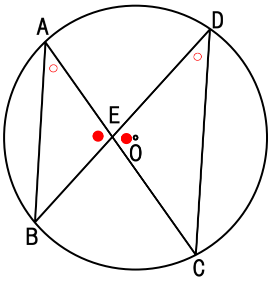


② 中心角は円周角の2倍である。

半径の長さは等しいので、△OPAと△OPBは(二等辺)三角形である。
よって、∠OPA＝∠(OAP)…①、∠OPB＝∠(OBP)…②
内角と外角の性質と①より、∠AOK＝∠OPA＋∠(OAP)…③
内角と外角の性質と②より、∠BOK＝∠OPB＋∠(OBP)…④
③④より、∠AOB＝∠OPA＋∠OAP＋∠OPB＋∠OBP＝2∠(APB)
したがって、中心角は円周角の2倍である。



次のことを証明しましょう。(14点×1問＝14点)

①


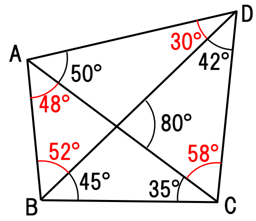
円Oト上にA、B、C、Dがあり、線分ACと線分BDの交点をEとする。
このとき、△ABE∽△DCEとなる。

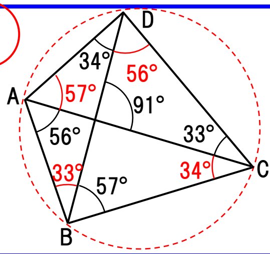
△ABEと△DCEで、
$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角なので、∠BAE＝∠CDE …①
対頂角なので、∠AEB＝∠DEC …②
①②より、2組の角がそれぞれ等しいので、△ABE∽△DCE

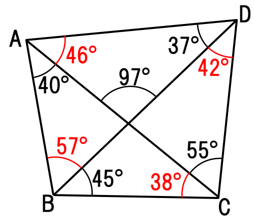
60　6章の確認テスト(2)	章	制限時間	合格点	
	6	30分	80点	点

4点A、B、C、Dが同じ円周上にあるものを1つずつ選び、記号に○をしましょう。(10点×2問＝20点)

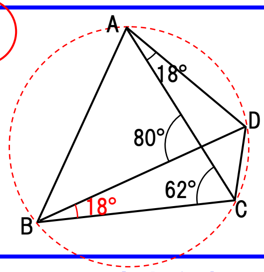
①

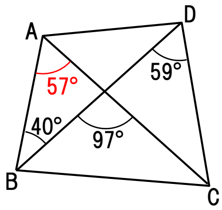
ア


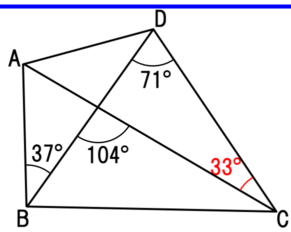
イ


ウ


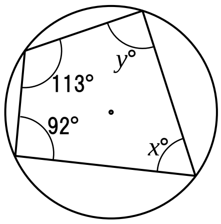
②

ア


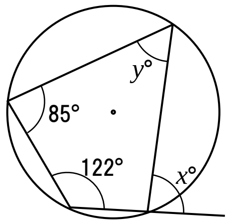
イ


ウ


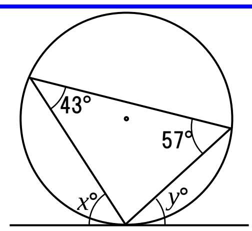
∠xと∠yの大きさを求めましょう。(8点×4問＝32点)

①


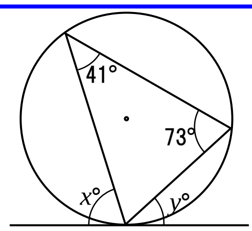
∠x＝67°　∠y＝88°

②


∠x＝85°　∠y＝58°

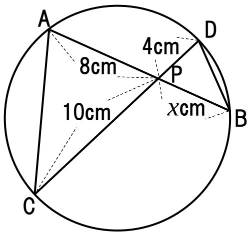
③


∠x＝57°　∠y＝43°

④


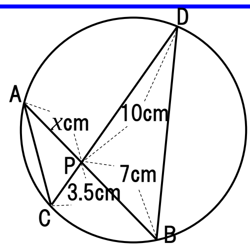
∠x＝73°　∠y＝41°

xの値を求めましょう。(6点×4問＝24点)

①


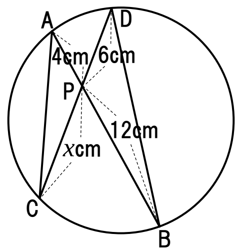
8×x＝10×4

8x＝40　x＝5(cm)

②


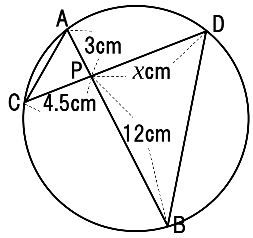
x×7＝10×3.5

7x＝35　x＝5(cm)

③


6×x＝4×12

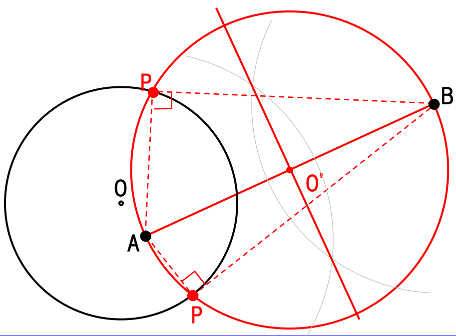
6x＝48　x＝8(cm)

④


4.5×x＝3×12

4.5x＝36　x＝8(cm)

次の図を作図しましょう。(12点×2問＝24点)

①


∠APB＝90°となる円O上の点P

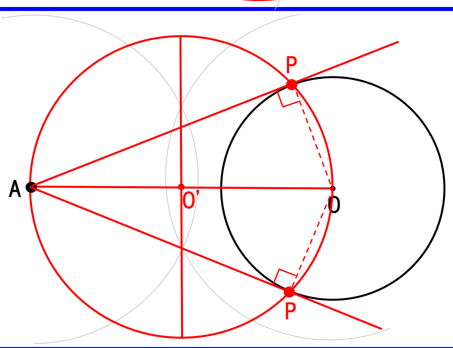
(ABを直径とする円を作図)

【作図の手順】

① 線分ABの垂直二等分線をひき、ABとの交点をO'とする。

② 点O'を中心とする半径O'Aの円をかく。

③ 円Oと円O'の交点をPとする。

②


点Aを通る円Oの接線AP

(AOを直径とする円を作図)

【作図の手順】

① 線分AOの垂直二等分線をひき、AOとの交点をO'とする。

② 点O'を中心とする半径O'Aの円をかく。

③ 円Oと円O'の交点をPとし、直線APをひく。